

Динамика трех вихрей в возмущенной сингулярной конфигурации

А. И. Гудименко

Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН
690041, Россия, Владивосток, ул. Балтийская, 43
E-mail: algud@poi.dvo.ru

Получено 25 июля 2008 г.

Численно и аналитически изучается движение трех точечных вихрей в конфигурации, близкой к сингулярной, т. е. когда два из трех вихрей достаточно близки друг к другу. Исследованы три случая движения, выделяемые положением центра завихренности относительно орбиты одного из вихрей, а именно когда центр завихренности лежит внутри, вне и на орбите. Для всех случаев получены асимптотики траекторий вихрей.

Ключевые слова: точечные вихри, асимптотическое поведение

A.I. Gudimenko

Dynamics of perturbed singular configuration of three point vortices

Motion of three point vortices in a perturbed singular configuration is studied numerically and analytically. Several cases of the motion are analyzed according to location of the vorticity center to the orbit of one of the vortices. For each of these cases the trajectories of vortices are calculated.

Keywords: point vortices, asymptotic behavior

Mathematical Subject Classifications: 37N10 37D45 76B47 76E20 76U05

1. Введение

Конфигурация трех вихрей, два из которых по положению на плоскости движения совпадают, называется *сингулярной* конфигурацией. Систему трех вихрей в сингулярной конфигурации можно рассматривать как систему двух вихрей, складывая интенсивности совпадающих вихрей и принимая их за один. В этой работе, для определенности, мы считаем, что совпадают вихри с номерами один и два. Обращаясь к известным результатам о движении двух вихрей [1, 2], мы делаем вывод, что вихри в сингулярной конфигурации в процессе движения сохраняют эту конфигурацию, вращаясь, в случае когда траекторий ограничены, по круговым орбитам вокруг центра завихренности с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3}{2\pi m_1}, \quad (1.1)$$

где κ_i — интенсивность i -го вихря, m_1 — квадрат расстояния между вторым (или первым) и третьим вихрями.

Предположение об ограниченности траекторий вихрей (см. раздел 3.1.1) мы принимаем на протяжении всего нашего исследования.

Конфигурация трех вихрей, близкая к сингулярной, называется *возмущенной* сингулярной конфигурацией. При этом две произвольные конфигурации считаются близкими, если вихри одной из них близки к соответствующим вихрям другой как по положению, так и по интенсивности. Понятие «близости» конфигураций будет уточнено в разделе 3.

В случае возмущенной сингулярной конфигурации следует ожидать, что в системе координат, вращающейся вокруг центра завихренности с угловой скоростью Ω , первые два вихря ведут себя в начальном приближении по возмущению как двухвихревая система, т. е. вращаются вокруг своего центра завихренности по круговым орбитам с угловой скоростью

$$\omega = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2\pi m_3}, \quad (1.2)$$

где m_3 — квадрат расстояния между первым и вторым вихрями.

Выяснить, что будет происходить с вихрями при учете последующих приближений, — цель настоящей работы.

2. Численный эксперимент

Результаты компьютерного анализа движения трех вихрей в возмущенной сингулярной конфигурации представлены на рис. 1 и 2. Здесь изображены траектории вихрей во вращающейся вокруг центра завихренности декартовой системе координат. Центр завихренности находится в начале координат, а угловая скорость вращения системы совпадает с частотой обращения первого вихря по своей орбите.

Можно выделить три типа траекторий, в зависимости от положения центра завихренности по отношению к области, ограниченной траекторией первого вихря. Случаю, когда центр завихренности лежит на границе этой области, отвечают траектории (а) и (d), вне — траектории (b) и (e), внутри — траектории (c) и (f). На рис. 2 с увеличением показана траектория первого вихря, которая на рис. 1(а) выглядит отрезком. Такой же вид имеет соответствующая траектория рис. 1(d).

На этих рисунках представлено поведение всего двух трехвихревых систем, причем таких, что интенсивности всех вихрей положительны, а интенсивность третьего вихря принимает

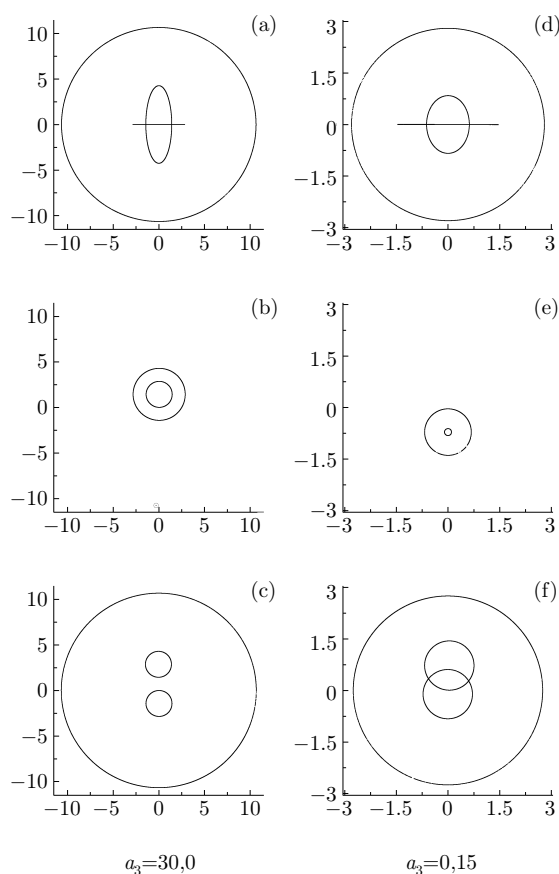


Рис. 1. Траектории вихрей в возмущенной сингулярной конфигурации в специальной вращающейся системе координат при $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и различных значениях a_3 , где a_i — обратные интенсивности вихрей. Слева траектории первого и второго вихрей показаны с увеличением в 6 раз, справа в 4 раза увеличены траектории первого и третьего вихрей

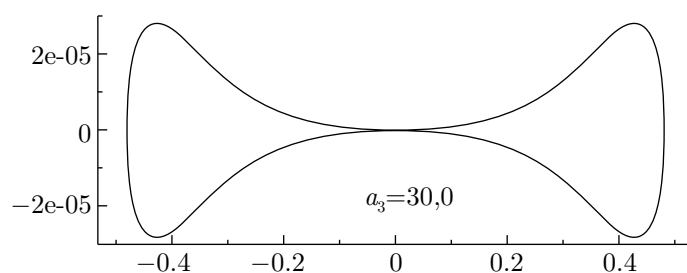


Рис. 2. Траектория первого вихря в случае, когда вихрь проходит через центр завихренности

в определенном смысле (см. раздел 3) предельные значения. Аналогичное поведение обнаруживают трехвихревые системы в возмущенной сингулярной конфигурации и при других значениях интенсивностей, в том числе и отрицательных. Конечно, надо всякий раз убеждаться, что мы действительно находимся в окрестности сингулярной конфигурации. Например, если интенсивности всех вихрей далеки от предельных значений, то возможен лишь случай, когда центр завихренности находится вне области, ограниченной траекторией первого вихря, а стремление интенсивности первого вихря к нулю или бесконечности отнюдь не означает, что конфигурация вихрей стремится к сингулярной.

3. Асимптотический анализ

Исследование движения вихрей в возмущенной сингулярной конфигурации мы начинаем с обзора предварительных сведений (раздел 3.1).

В разделе 3.2 мы изучаем движение вихрей в случае, когда их интенсивности порядка единицы и далеки от своих предельных значений. Такой выбор интенсивностей соответствует движению, при котором центр завихренности достаточно удален от траекторий вихрей и в указанной в предыдущем разделе системе отсчета находится вне области, ограниченной первыми двумя вихрями. Мы увидим, что в этой системе отсчета третий вихрь претерпевает равномерное вращение по круговой орбите с частотой 2ω , а первые два вихря при дополнительном переходе в систему отсчета, вращающуюся вокруг их центра завихренности с частотой ω , претерпевают вращение с частотой 2ω по эллипсам с эксцентриситетом $1/2$.

Случай, когда первый вихрь пересекает центр завихренности, обсуждается в разделе 3.3. Возмущенная сингулярная конфигурация вихрей может реализоваться в этом случае только при предельных значениях интенсивностей второго и третьего вихрей. Не ограничивая, на наш взгляд, общности, мы принимаем $a_3 \rightarrow \pm\infty$ и $a_3 \rightarrow 0$. Основным результатом раздела — получение уравнения траектории первого вихря (см. рис. 2). В декартовых координатах при подходящей нормировке это уравнение имеет вид $y^2 = x^8(1 - x^2)$.

В разделе 3.4 рассматривается случай движения, когда траектория первого вихря проходит вблизи центра завихренности (см. рис. 1 (b), (c), (e) и (f)).

3.1. Предварительные сведения

3.1.1. Уравнения движения вихрей

Динамика трех точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{a_1 a_2 a_3} \ln m_i \quad (3.1)$$

и скобкой Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^3 a_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right),$$

где a_i — обратная интенсивность i -го вихря, m_i — квадрат расстояния между вихрями, отличными от i -го, x_i и y_i — его декартовы координаты. Говорят еще, что эта система описывает *абсолютное* движение трех вихрей.

Наличие в системе, помимо гамильтониана, первых интегралов

$$Q = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{a_i}, \quad P = \sum_{i=1}^3 \frac{y_i}{a_i}, \quad I = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2 + y_i^2}{a_i}$$

позволяет свести ее к одномерной системе, про которую говорят, что она описывает *относительное* движение трех вихрей. Мы принимаем способ редукции, предложенный в [1]. А именно, относительное движение описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом (3.1) и скобкой Ли—Пуассона

$$\{m_i, \Delta\} = (a_j - a_k)m_i + (a_j + a_k)(m_j - m_k), \quad \{m_i, m_j\} = -4a_k\Delta, \quad (3.2)$$

ограниченными на поверхность уровня $f = 0$ и $g = \text{const}$, где

$$\begin{aligned} f &= (2\Delta)^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1), \\ g &= \frac{a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3}{4a} \end{aligned} \quad (3.3)$$

— центральные функции соответствующей алгебры Ли. Здесь Δ — удвоенная ориентированная площадь вихревого треугольника, и $a = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$. Алгебра Ли, соответствующая Ли-пуассоновой структуре (3.2), названа в [1] вихревой алгеброй.

Поверхность уровня $f = 0$ и $g = \text{const}$ является фазовым пространством редуцированной системы. При $a > 0$ это пространство компактно [1]. В данной работе мы всюду предполагаем выполнение этого условия.

3.1.2. Нормированные канонические координаты

В работе [1] в случае $a > 0$ на фазовом пространстве редуцированной системы были определены канонические координаты. К сожалению, они не очень удобны для наших целей, ибо их нуль не совпадает, вообще говоря, с сингулярной особой точкой. Введем, следуя методу этой работы, более подходящие координаты.

Выберем в качестве образующих вихревой алгебры

$$e_i = \frac{\Delta}{2g\sqrt{a}}, \quad e_j = \frac{a_i(a_i + a_j)m_i + a_j(a_i + a_j)m_j - (a_ia_j + a)m_k}{4ga(a_i + a_j)}, \quad (3.4)$$

$$e_k = \frac{(a_i + a_j)m_i - (a_i + a_j)m_j + (a_i - a_j)m_k}{4g\sqrt{a}(a_i + a_j)} \quad (3.5)$$

и g . В этих образующих фазовое пространство системы становится сферой

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1, \quad (3.6)$$

а ли-пуассонова структура (3.2) приобретает вид

$$\{g, e_i\} = 0, \quad \{e_i, e_j\} = g^{-1}e_k.$$

Определим на сфере (3.6) координаты (x, y) , полагая

$$e_i = y, \quad e_j = \sqrt{1 - y^2} \cos x, \quad e_k = \sqrt{1 - y^2} \sin x. \quad (3.7)$$

В этих координатах $\{x, y\} = g^{-1}$, поэтому мы называем их *нормированными каноническими координатами*. Их начало совпадает с сингулярной точкой $m_k = 0$.

На рис. 3 приведены фазовые портреты относительного движения трех вихрей в нормированных канонических координатах при интенсивностях, соответствующих траекториям абсолютного движения (а) и (д) на рис. 1.

Разрешая систему (3.3)–(3.5) относительно m_i, m_j, m_k , имеем

$$m_i = 2g(a_j + a_k + \frac{a - a_j^2}{a_i + a_j} e_j + \frac{2a_j\sqrt{a}}{a_i + a_j} e_k), \quad (3.8)$$

$$m_j = 2g(a_i + a_k + \frac{a - a_i^2}{a_i + a_j} e_j - \frac{2a_i\sqrt{a}}{a_i + a_j} e_k), \quad m_k = 2g(a_i + a_j - (a_i + a_j) e_j). \quad (3.9)$$

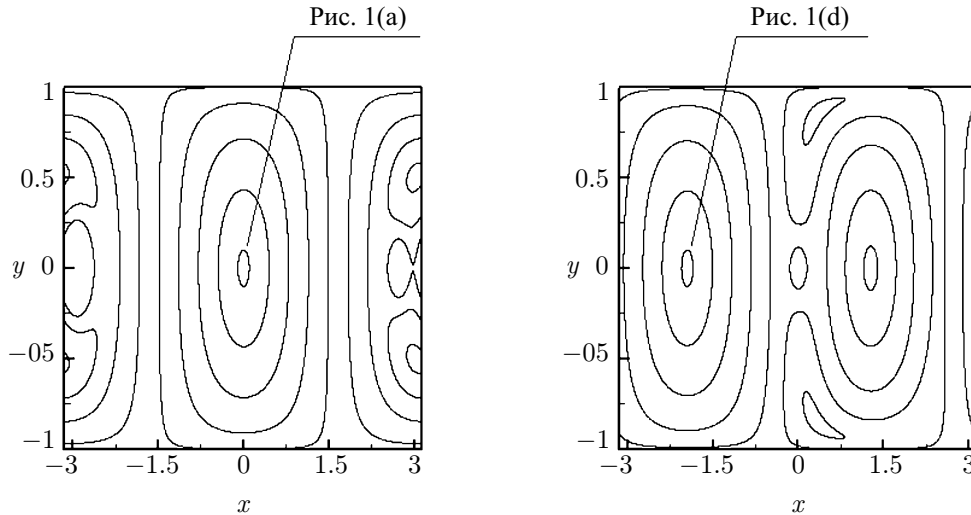


Рис. 3. Фазовые портреты относительного движения трех вихрей в нормированных канонических координатах при $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 30$ (слева) и $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0.15$ (справа)

3.1.3. Переменные угол-действие

В окрестности сингулярной особой точки фазового пространства редуцированной системы наряду с нормированными каноническими координатами (x, y) мы будем использовать отвечающие им полярные координаты (ρ, ϕ) , а также координаты угол-действие (θ, J) . Для последних, учитывая нормировку, имеем

$$J = \frac{g}{4\pi} \int_0^{2\pi} r^2 d\phi, \quad \theta = -\frac{\partial S}{\partial J}, \quad S = \frac{g}{2} \int_0^\phi r^2 d\phi. \quad (3.10)$$

3.1.4. Связь относительных и абсолютных координат

Обозначим r_i и ϕ_i полярные координаты i -го вихря. Примем, что центр завихренности находится в начале координат. Тогда из интегралов движения и теоремы косинусов следуют соотношения:

$$\cos(\phi_i - \phi_j) = \frac{a_i a_j}{2r_i r_j} \left(\frac{r_k^2}{a_k^2} - \frac{r_i^2}{a_i^2} - \frac{r_j^2}{a_j^2} \right), \quad (3.11)$$

$$r_i^2 = \frac{4ga_i^2(a_j + a_k)}{a} - \frac{a_i^2 m_i}{a}. \quad (3.12)$$

С их учетом из уравнений Гамильтона абсолютной динамики имеем

$$\dot{\phi}_i = \frac{a_i}{4\pi a r_i^2} \frac{a_j a_k (m_j + m_k)(m_j + m_k - m_i) + 2(a_j^2 + a_k^2)m_j m_k}{a_j a_k m_j m_k}. \quad (3.13)$$

Соотношения (3.11)–(3.13) и определяют искомую связь относительных и абсолютных координат для системы трех вихрей.

В последующем нам понадобятся выражения для квадратов длин сторон вихревого треугольника через интенсивности вихрей в момент прохождения первого вихря через центр завих-

ренности. Из (3.12) и (3.13) при $r_1 \rightarrow 0$ имеем

$$m_1 = 4g(a_2 + a_3), \quad m_2 = \frac{4ga_3^2}{a_2 + a_3}, \quad m_3 = \frac{4ga_2^2}{a_2 + a_3}. \quad (3.14)$$

3.2. Внешняя динамика

Асимптотики в этом разделе строятся в предположении, что интенсивности вихрей фиксированы. Это соответствует случаю, когда траектории вихрей располагаются достаточно далеко от центра завихренности.

3.2.1. Переменные угол-действие

Выразим полярные координаты в окрестности сингулярной особой точки редуцированной системы через переменные угол-действие.

Будем предполагать, что в этой окрестности справедливы разложения

$$h = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{a_1 a_2 a_3} \ln m_i + h_2 \epsilon^2 + O(\epsilon^4), \quad (3.15)$$

$$\rho = \epsilon + \rho_3 \epsilon^3 + O(\epsilon^5), \quad (3.16)$$

где ϵ — малый параметр, m_{i0} и h_2 — константы, ρ_3 — функция ϕ . Неизвестные величины определим, требуя, чтобы в рассматриваемой окрестности выполнялись соотношения

$$H(\rho, \phi) = h, \quad (3.17)$$

$$J = \frac{1}{2} g \epsilon^2 + O(\epsilon^6), \quad (3.18)$$

где $H(\rho, \phi)$ — выражение для гамильтониана в полярных координатах, полученное с использованием (3.7)–(3.9), и J — действие, определенное в (3.10).

Следуя стандартной технике асимптотических разложений (см., например, [4]), т. е. подставляя разложения (3.15) и (3.16) в определяющие соотношения (3.17) и (3.18), отделяя коэффициенты при одинаковых степенях ϵ и разрешая полученные уравнения, найдем

$$\begin{aligned} m_{10} &= \frac{4ga}{a_1 + a_2}, \quad m_{20} = \frac{4ga}{a_1 + a_2}, \quad m_{30} = g(a_1 + a_2)\epsilon^2, \\ h_2 &= \frac{a_1 + a_2}{16\pi a_1 a_2 a_3}, \\ \rho_3 &= -\frac{\cos 4\phi}{24} + \frac{2a_3 a + 3a_1 a_2 (a_1 + a_2)}{24a_3 a} \cos 2\phi. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Аналогичным образом, из соотношений (3.10), (3.18) и выражением для ρ , получим

$$\theta = -\phi - \frac{(4a_3 a + 6a_1 a_2 (a_1 + a_2)) \sin 2\phi - a_3 a \sin 4\phi}{24a_3 a} \epsilon^2 + O(\epsilon^4).$$

Обращая этот ряд относительно ϕ и подставляя результат в (3.16), (3.19), найдем окончательно

$$\phi = -\theta + \left(-\frac{1}{24} \sin 4\theta + \frac{2a_3 a + 3a_1 a_2 (a_1 + a_2)}{12a_3 a} \sin 2\theta \right) \epsilon^2 + O(\epsilon^4), \quad (3.20)$$

$$\rho = \epsilon + \left(-\frac{1}{24} \cos 4\theta + \frac{2a_3 a + 3a_1 a_2 (a_1 + a_2)}{24a_3 a} \cos 2\theta \right) \epsilon^3 + O(\epsilon^5). \quad (3.21)$$

В выражениях (3.15), (3.20) и (3.21) фигурирует параметр ϵ , связанный с действием простым соотношением (3.18). Принимая это во внимание, можно считать, что указанные выражения — искомые.

3.2.2. Относительное движение

Переходя в выражениях (3.8)–(3.9) для квадратов длин сторон вихревого треугольника к полярным координатам и подставляя туда (3.20) и (3.21), находим

$$m_1 = \frac{4ga}{a_1 + a_2} + \frac{4ga_2\sqrt{a}\cos\theta}{a_1 + a_2}\epsilon - \frac{g(a - a_2^2)}{a_1 + a_2}\epsilon^2 - \frac{ga_2(a_1a_2(a_1 + a_2)\cos 3\theta + (2a_3a - 3a_1a_2(a_1 + a_2))\cos\theta)}{4(a_1 + a_2)\sqrt{a}a_3}\epsilon^3 + O(\epsilon^4), \quad (3.22)$$

$$m_2 = \frac{4ga}{a_1 + a_2} - \frac{4ga_1\sqrt{a}\cos\theta}{a_1 + a_2}\epsilon - \frac{g(a - a_1^2)}{a_1 + a_2}\epsilon^2 + \frac{ga_1(a_1a_2(a_1 + a_2)\cos 3\theta + (2a_3a - 3a_1a_2(a_1 + a_2))\cos\theta)}{4(a_1 + a_2)\sqrt{a}a_3}\epsilon^3 + O(\epsilon^4), \quad (3.23)$$

$$m_3 = g(a_1 + a_2)\epsilon^2 + \frac{ga_1a_2(a_1 + a_2)^2\cos 2\theta}{4a_3a}\epsilon^4 + O(\epsilon^6). \quad (3.24)$$

Координата угол зависит от времени через соотношение $\theta = \omega t + \theta_0$, где частота относительного движения ω определяется производной гамильтониана (3.15) по действию и есть

$$\omega = -\frac{1}{2\pi ga_1a_2\epsilon^2} + \frac{a_1 + a_2}{8\pi ga_1a_2a_3} + O(\epsilon^2).$$

Как и ожидалось, ω в начальном приближении совпадает с угловой скоростью вращения первых двух вихрей вокруг их центра интенсивностей без учета влияния третьего вихря (ср. с выражением (1.2)).

3.2.3. Абсолютное движение

Абсолютное движение вихрей опишем, исходя из выражений для декартовых координат вихрей в системе отсчета, вращающейся вокруг центра завихренности с угловой скоростью Ω , равной нулевой гармонике в разложении Фурье функции $\dot{\phi}_i$ из (3.13) по периоду относительного движения.¹ Из (3.11) следует, что эта гармоника одна и та же для всех вихрей. Используя (3.12) и (3.22)–(3.24), из (3.13) находим

$$\Omega = \frac{a_1 + a_2}{8\pi ga_1a_2a_3} \left(1 + \frac{1}{4}\epsilon^2\right) + O(\epsilon^4).$$

Декартовы координаты вихрей в этой системе найдем из (3.11)–(3.13) с использованием (3.22)–(3.24). Чтобы избавиться от неопределенных констант, возникающих при интегрировании (3.13), примем $\phi_1(t)|_{t=0} = 0$. Тогда из (3.11) получим $\phi_2(t)|_{t=0} = 0$, и $\phi_3(t)|_{t=0} = 0$ или

¹Согласно [1, 3] в этой системе траектории вихрей замкнуты.

$\phi_3(t)|_{t=0} = \pi$, в зависимости от расположения вихрей невозмущенной конфигурации относительно центра завихренности — по одну или разные стороны. В результате

$$x_i = r_{i0} \left(1 + (-1)^i \frac{\sqrt{a} a_i \cos \theta}{2a_1 a_2} \epsilon - \frac{1}{8} \epsilon^2 + (-1)^i \frac{a_i (a_1 + a_2) (3 \cos \theta - \cos 3\theta)}{32\sqrt{a} a_3} \epsilon^3 \right) + O(\epsilon^4), \quad (3.25)$$

$$y_i = r_{i0} \left(-(-1)^i \frac{\sqrt{a} a_i \sin \theta}{2a_1 a_2} \epsilon + (-1)^i \frac{a_i (a_1 + a_2) (3 \sin \theta + \sin 3\theta)}{32\sqrt{a} a_3} \epsilon^3 \right) + O(\epsilon^4), \quad i = 1, 2, \quad (3.26)$$

$$x_3 = \pm r_{30} \left(1 - \frac{1}{8} \epsilon^2 - \frac{aa_3 + 4a_1 a_2 (a_1 + a_2) \cos 2\theta}{128aa_3} \epsilon^4 \right) + O(\epsilon^5), \quad (3.27)$$

$$y_3 = \mp \frac{r_{30} a_1 a_2 (a_1 + a_2) \sin 2\theta}{32aa_3} \epsilon^4 + O(\epsilon^5), \quad (3.28)$$

где

$$r_{10} = r_{20} = 2\sqrt{\frac{ga_1^2 a_2^2}{a(a_1 + a_2)}}, \quad r_{30} = 2\sqrt{\frac{ga_3^2 (a_1 + a_2)}{a}}.$$

Из этих выражений сразу следует, что в первом приближении по ϵ в системе отсчета, вращающейся вокруг центра завихренности с угловой скоростью Ω , первые два вихря ведут себя как свободные в неподвижной системе, не испытывая влияния третьего вихря. Что касается третьего вихря, то в этой вращающейся системе он покоится вплоть до третьего приближения по ϵ включительно. В четвертом приближении мы обнаруживаем, что вихрь вращается вокруг точки

$$x_{i0} = r_{i0} \left(1 - \frac{1}{8} \epsilon^2 - \frac{1}{128} \epsilon^4 \right) + O(\epsilon^5), \quad i = 3,$$

с частотой 2ω по круговой орбите радиуса, равного амплитуде соответствующей гармоники в (3.27) или (3.28).

Чтобы описать динамику первых двух вихрей с большей точностью, подвергнем координаты (3.25) и (3.26) преобразованию, состоящему из композиции сдвига по оси x на x_{10} и поворота на угол θ . Получим в прежних обозначениях

$$x_i = \frac{(-1)^i a_i r_{10}}{2} \left(\frac{\sqrt{a}}{a_1 a_2} \epsilon + \frac{(a_1 + a_2) \cos 2\theta}{8\sqrt{a} a_3} \epsilon^3 \right) + O(\epsilon^4),$$

$$y_i = (-1)^i a_i r_{10} \frac{(a_1 + a_2) \sin 2\theta}{8\sqrt{a} a_3} \epsilon^3 + O(\epsilon^4).$$

Мы видим, что в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг точки с координатами $(x_{10}, 0)$ (напомним, что мы уже находимся во вращающейся системе отсчета) вихри покоятся вплоть до второго приближения по ϵ , однако претерпевают вращение с угловой скоростью 2ω по эллиптическим орбитам с эксцентриситетом $1/2$ в третьем приближении.

3.3. Центральная динамика

Случай, когда траектория первого вихря в возмущенной сингулярной конфигурации проходит через центр завихренности реализуется при $a_3 \rightarrow \pm\infty$ и $a_3 \rightarrow 0$. В данной работе мы ограничимся изучением случая $a_3 \rightarrow \pm\infty$.

3.3.1. Уравнения движения в переменных угол-действие

Будем предполагать, что выполняются разложения

$$\begin{aligned}a_3 &= \alpha\epsilon^{-2} + \alpha_0 + \alpha_4\epsilon^4 + \alpha_6\epsilon^6 + O(\epsilon^8), \\h &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{a_1 a_2 a_3} \ln m_i + h_4\epsilon^4 + h_6\epsilon^6 + O(\epsilon^8), \\ \rho &= \epsilon + \rho_3\epsilon^3 + \rho_5\epsilon^5 + O(\epsilon^7),\end{aligned}$$

где $\alpha, \alpha_0, \alpha_4$ и α_6 — константы, а остальные обозначения такой же смысл, как в разделе 3.2.1.

Определяющие соотношения для коэффициентов также прежние,

$$H(\rho, \phi) = h, \quad J = \frac{1}{2}g\epsilon^2 + O(\epsilon^8),$$

включая дополнительно условие (3.14), которое должно выполняться при $\phi = 0$.

Так же, как и ранее находим

$$\begin{aligned}m_{10} &= \frac{16ga_2^2}{(a_1 + a_2)\epsilon^2}, \quad m_{20} = \frac{16ga_2^2}{(a_1 + a_2)\epsilon^2}, \quad m_{30} = g(a_1 + a_2)\epsilon^2, \\ \alpha &= \frac{4a_2^2}{a_1 + a_2}, \quad \alpha_0 = -a_2, \quad \alpha_4 = -\frac{a_1(a_1 + a_2)}{16a_2}, \quad \alpha_6 = -\frac{a_1(5a_1^2 + 12a_1a_2 + 7a_2^2)}{192a_2^2}, \\ h_4 &= \frac{(a_1 + a_2)^2}{32\pi a_1 a_2^3}, \quad h_6 = \frac{2a_1^3 + 7a_1^2a_2 + 8a_1a_2^2 + 3a_2^3}{256\pi a_1 a_2^4}, \\ \rho_3 &= -\frac{\cos 4\phi}{24} + \frac{\cos 2\phi}{12}, \quad \rho_5 = \frac{7 \cos 8\phi}{2304} - \frac{11 \cos 6\phi}{1440} - \frac{7 \cos 4\phi}{2880} + \frac{\cos 2\phi}{72} - \frac{5}{2304},\end{aligned}$$

а выражения для ρ и ϕ через переменные угол-действие мы опустим по причине их громоздкости.

В отличие от случая раздела 3.2, мы не будем приводить выражения для квадратов длин сторон вихревого треугольника, а затем сразу переходить к выражениям для декартовых координат вихрей. Вместо этого мы начнем анализ абсолютного движения вихрей с уравнений (3.12) и (3.13), преобразованных к координатам (ϵ, θ) :

$$\begin{aligned}r_1^2 &= \frac{2ga_1^2(1 - \cos \theta)\epsilon^2}{a_1 + a_2} + O(\epsilon^4), \\ r_2^2 &= \frac{g(a_1^2 + 2a_1a_2 \cos \theta + a_2^2)\epsilon^2}{a_1 + a_2} + O(\epsilon^6), \quad r_3^2 = \frac{16ga_2^2}{(a_1 + a_2)\epsilon^3} + O(1), \\ \dot{\phi}_1 &= \Omega_1 - \frac{(a_1 + a_2)^2(\cos 2\theta - \cos \theta)\epsilon^4}{256\pi ga_2^4} + O(\epsilon^6), \\ \dot{\phi}_2 &= \frac{a_1 \cos \theta + a_2}{2\pi ga_1(a_1^2 + 2a_1a_2 \cos \theta + a_2^2)\epsilon^2} + O(1), \quad \dot{\phi}_3 = \frac{(a_1 + a_2)^2\epsilon^2}{32\pi ga_1 a_2^3} + O(\epsilon^4),\end{aligned}$$

где

$$\Omega_1 = \frac{1}{4\pi ga_1 a_2 \epsilon^2} + \frac{(a_1 + a_2)^2 \epsilon^2}{64\pi ga_1 a_2^3} + \frac{(a_1 + 2a_2)(a_1 + a_2)^2 \epsilon^4}{256\pi ga_1 a_2^4} + O(\epsilon^6).$$

Выражение для частоты ω относительного движения вихревого треугольника мы найдем, как и прежде, дифференцированием гамильтониана по действию. Имеем

$$\omega = -\frac{1}{2\pi g a_1 a_2 \epsilon^2} + O(1).$$

3.3.2. Траектории вихрей

Опишем движение вихрей в системе отсчета, вращающейся относительно центра завихренности с угловой скоростью Ω_1 . Из полученных выражений для r_3 и $\dot{\phi}_3$ сразу следует, что в этой системе третий вихрь вращается вокруг того же центра с угловой скоростью $-\Omega_1$ по окружности радиуса r_3 .

Что касается первого и второго вихрей, то, интегрируя выражения для $\dot{\phi}_1$ и $\dot{\phi}_2$, получаем в принятой системе отсчета

$$\phi_1 = \frac{a_1(a_1 + a_2)^2(\sin 2\theta - 2\sin \theta)\epsilon^6}{256a_2^3}, \quad \phi_2 = \arctg \frac{(a_1 - a_2) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{a_1 + a_2}.$$

Отсюда и из выражений для r_1 и r_2 находим в декартовых координатах уравнения траектории первого вихря

$$\frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_1^8}{a^8} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right), \quad a^2 = \frac{4ga_1^2\epsilon^2}{a_1 + a_2}, \quad b^2 = \frac{ga_1^4(a_1 + a_2)^3\epsilon^{14}}{256a_2^6},$$

и второго вихря

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = g(a_1 + a_2)\epsilon^2, \quad b^2 = \frac{g(a_2 - a_1)^2\epsilon^2}{a_1 + a_2}.$$

3.4. Окрестная динамика

Исследуем движение вихрей в возмущенной сингулярной конфигурации в случае, когда траектория первого вихря проходит вблизи центра завихренности. Будем считать для определенности, что интенсивности всех вихрей положительны и $a_3 \rightarrow \infty$.

3.4.1. Уравнения движения в переменных угол-действие

Примем

$$a_3 = \frac{4a_2^2\beta^2}{(a_1 + a_2)\epsilon^2} + O(\epsilon), \quad h = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{a_1 a_2 a_3} \ln m_i + O(\epsilon^2), \quad \rho = \epsilon + O(\epsilon^3) \quad (3.29)$$

Действуя как в разделе 3.2.1, из условий

$$H(\rho, \phi) = h, \quad J = \frac{1}{2}g\epsilon^2 + O(\epsilon^6),$$

найдем

$$m_{10} = \frac{16ga_2^2\beta^2}{(a_1 + a_2)\epsilon^2}, \quad m_{20} = \frac{16ga_2^2\beta^2}{(a_1 + a_2)\epsilon^2}, \quad m_{30} = g(a_1 + a_2)\epsilon^2,$$

и далее

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{16ga_2^2\beta^2}{(a_1+a_2)\epsilon^2} + \frac{4ga_2(a_1+2a_2\cos\theta-a_2\beta^2)}{a_1+a_2} + O(\epsilon), \\ m_2 &= \frac{16ga_2^2\beta^2}{(a_1+a_2)\epsilon^2} + \frac{4ga_2(a_1-2a_2\cos\theta-a_2\beta^2)}{a_1+a_2} + O(\epsilon), \\ m_3 &= g(a_1+a_2)\epsilon^2 + O(\epsilon^3). \end{aligned}$$

Используя эти выражения, из (3.12), (3.13) находим

$$r_1^2 = \frac{ga_1^2(1-2\beta\cos\theta+\beta^2)}{(a_1+a_2)\beta^2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3), \quad r_2^2 = \frac{g(a_1^2+2a_1a_2\beta\cos\theta+a_2^2\beta^2)}{(a_1+a_2)\beta^2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3), \quad (3.30)$$

$$r_3^2 = \frac{16ga_2^2\beta^2}{(a_1+a_2)\epsilon^2} + O(1) \quad (3.31)$$

$$\dot{\phi}_1 = -\frac{(\cos\theta-\beta)\beta}{2\pi ga_1a_2(1-2\beta\cos\theta+\beta^2)}, \quad \dot{\phi}_2 = \frac{(a_1\cos\theta+a_2\beta)\beta}{2\pi ga_1(a_1^2+2a_1a_2\beta\cos\theta+a_2^2\beta^2)}, \quad (3.32)$$

$$\dot{\phi}_3 = \frac{(a_1+a_2)^2}{32\pi ga_1a_2^3\beta^2}\epsilon^2 + O(\epsilon^4). \quad (3.33)$$

3.4.2. Траектории вихрей

Опишем движение вихрей в системе отсчета, вращающейся относительно центра завихренности с угловой скоростью Ω_1 , равной частоте оборота первого вихря по своей орбите, т. е. нулевой гармонике в разложении Фурье для функции $\dot{\phi}_1$ из (3.32). Вычисления дают

$$\Omega_1 = -\frac{1}{2}(1-\text{sign}(1-\beta^2))\omega + O(\epsilon), \quad (3.34)$$

где

$$\omega = -\frac{1}{2\pi ga_1a_2\epsilon^2} + O(1)$$

— частота относительного движения вихрей, полученная дифференцированием h из (3.29) по действию.

Интегрируя выражения (3.32), находим, что в указанной системе отсчета

$$\phi_1 = \arctg \frac{(1+\beta)\text{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\beta} + \frac{\text{sign}(1-\beta^2)\theta}{2}, \quad \phi_2 = \arctg \frac{(a_1-a_2\beta)\text{tg}\frac{\theta}{2}}{a_1+a_2\beta} + \frac{\text{sign}(1-\beta^2)\theta}{2}.$$

Переходя здесь и в (3.30) к декартовым координатам и исключая угловую переменную, находим уравнения траекторий первых двух вихрей:

$$(x_i - x_{i0})^2 + y_i^2 = r_i^2,$$

где

$$x_{i0} = (-1)^i \frac{\sqrt{g}a_i\epsilon}{\sqrt{a_1+a_2}}, \quad r_i^2 = \frac{ga_1^2\epsilon^2}{(a_1+a_2)\beta^2} \quad (\beta > 1),$$

$$x_{i0} = \frac{\sqrt{g}a_1\epsilon}{\sqrt{a_1 + a_2}\beta}, \quad r_i^2 = \frac{ga_i^2\epsilon^2}{(a_1 + a_2)\beta^2} \quad (\beta < 1).$$

Эти уравнения определяют окружности, имеющие в случае $\beta > 1$ одинаковый радиус, но разные центры, а в случае $\beta < 1$ — общий центр, но разные радиусы, что согласуется с результатами компьютерного эксперимента (см. рис. 1).

Третий вихрь, согласно (3.31), (3.33) и (3.34), испытывает вращение вокруг центра завихренности по окружности радиуса r_3 с угловой скоростью $\dot{\phi}_3 - \Omega_1$.

Работа поддержана грантами РФФИ (проект 07-05-92210) и РФФИ-ДВО (проект 08-05-00061).

Список литературы

- [1] Борисов А. В., Мамаев И. С., *Математические методы динамики вихревых структур*, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005, 386 с.
- [2] Мелешко В. В., Константинов М. Ю., *Динамика вихревых структур*, Киев: Наукова думка, 1993, 280 с.
- [3] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A., Absolute and relative choreographies in the problem of point vortices moving on a plain, *Regul. Chaotic. Dyn.*, 2004, vol. 9, no. 2, pp. 101–112.
- [4] Nayfeh A. H., *Perturbation Methods. Pure and Applied Mathematics*, New York: John Wiley & Sons, 1973.